

Algoritmos de búsqueda de posiciones óptimas en localizaciones circulares. Aplicación a la competición política

F. Soler ^a, M.D. López^a, J. Rodrigo^b, S. Lantarón^a

(a) *Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil de la E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid.*

E-mail: f.soler@upm.es, marilo.lopez@upm.es, sagrario.lantaron@upm.es

(b) *Departamento de Matemática Aplicada. E.T.S. de Ingeniería. Universidad Pontificia Comillas de Madrid.*

E-mail: jrodrigo@upcomillas.es

Resumen. En este trabajo se desarrolla una aplicación de los datos direccionales a la ciencia política. Se presenta un modelo en el que las preferencias políticas de los tipos de votantes de una población se representan como puntos de la circunferencia unidad y los partidos políticos buscan las posiciones óptimas en ella para captar el máximo apoyo de ese conjunto finito de tipos de votantes. Se desarrollan algoritmos de búsqueda basados en los estudios realizados y se implementa uno de ellos, realizándose simulaciones de ejemplos relacionados con el posicionamiento político e interpretándose los resultados.

Palabras clave. Localización, geometría computacional, posicionamiento político, algoritmos exactos, simulación.

1 INTRODUCCIÓN

En diversos campos del conocimiento se pueden encontrar mediciones que representan direcciones. Los datos direccionales se relacionan con observaciones que son vectores unitarios en el espacio r -dimensional. Los considerados en el plano 2-dimensional se denominan datos circulares y los considerados en el espacio 3-dimensional se denominan datos esféricos. Así, los espacios muestrales más comunes para este tipo de estudios, son el círculo unitario o la esfera unitaria. Los datos direccionales aparecen en varias áreas de manera natural y son especialmente comunes en las ciencias biológicas, meteorológicas y ecológicas. Algunas aplicaciones se encuentran, por ejemplo, en el análisis de direcciones de viento, direcciones de migración de aves, orientación de depósitos geológicos, análisis de datos axiales, etc. Una revisión detallada sobre el tema puede consultarse en [1], [2], [3] y más recientemente en [4], [5] o [6]. En este trabajo se desarrolla una aplicación del estudio y tratamiento de los datos direccionales a la ciencia política.

La idea se basa en que las posturas políticas de una población de votantes se pueden modelar mediante un segmento cuyo centro representaría la postura más moderada y los extremos las más radicales tanto a la derecha como a la izquierda de esa postura central. Sin embargo, es posible interpretar dos realidades:

- Por un lado, las posiciones más radicales tienen en el fondo una base común de pensamiento pero están separadas por matices ideológicos. Posturas tan radicales como los nazis y los estalinistas, los primeros ubicados en la extrema derecha y los segundos en la extrema izquierda, tienen unas líneas de actuación comunes basadas en ciertos métodos violentos y purgas de la población. Por ello, identificar los dos extremos del segmento para generar una circunferencia puede ser considerado un punto de partida adecuado para definir un espacio político [7].
- Por otro lado, hay que constatar que la aproximación anterior no sería válida si no se considera que las distintas ideologías, a medida que se radicalizan, tienen una menor tolerancia hacia otras posturas políticas. Así, es imposible que un tipo de votante cercano a la extrema derecha encuentre puntos en común con un tipo de votante de extrema izquierda.

Matemáticamente la primera realidad se puede modelar considerando un espacio de trabajo que sea una circunferencia. Se tomará centrada en el origen de coordenadas y de radio unidad. Se supondrá que ese punto medio del segmento, postura central moderada, ocupa el polo Este de dicha circunferencia. De esta manera las distintas posturas políticas preferidas por los votantes, pueden ser representadas como puntos de la circunferencia situados por encima de este polo Este en sentido antihorario (ideologías más de derechas) o por debajo de él, en sentido horario (posturas más izquierdistas). Así es posible ver cada preferencia política como un vector unitario en el plano y puede considerarse el problema dentro del marco del estudio de datos direccionales. Cada postura política x_i , por ser un punto de la circunferencia de radio unidad, será representada por un ángulo θ_i tomando como origen de medida de los ángulos el polo Este ($\theta = 0$). Los ángulos positivos representarán posturas más hacia la derecha respecto a la central moderada y los negativos posturas más hacia la izquierda. A mayor ángulo, tomado en valor absoluto, más alejado de la política central está x_i . Modelos de competición política desarrollados en el plano en los que se buscan posiciones de equilibrio ([8]), establecen que en situaciones de estabilidad económica y social, dicho equilibrio si existe, es único y en una posición central respecto a las preferencias de los votantes ([9]; [10]; [11]). De esta manera los partidos políticos deben presentar posturas similares y moderadas para captar el mayor número de votantes ([12]; [13]; [14]; [15]). Sin embargo, en momentos de crisis y crispación

social se produce un fenómeno de radicalización tanto en la población como en las decisiones políticas que los partidos deben tomar. Esto se traduce en una polarización de las ideologías en grupos concentrados de tendencias más extremistas. Por ello, puede ser de interés, desde el punto de vista de la toma de decisiones de un partido para dar respuesta a ciertos problemas de la ciudadanía, encontrar la postura política que ha de elegir dicho partido para acercarse al mayor número de votantes en este nuevo escenario, y adaptar su programa a dicha posición política. Esta nueva postura ya no será esa opción central que se produce en los modelos anteriormente citados. Para tener en cuenta la segunda realidad se considerará que cada tipo de votante tendrá un cierto radio de tolerancia que le permitirá votar a un determinado partido si éste está alejado de su preferencia no más que ese radio de tolerancia. Con la idea de que tipos de votantes con ideologías extremas son más inmovilistas, los radios de tolerancia pueden considerarse variables, de forma que disminuirán a medida que crece la radicalización de los votantes, tendiendo a cero cuando la radicalización es máxima. De esta manera se consigue que, pese a estar la extrema derecha y la extrema izquierda próximas en la circunferencia, no tengan ningún punto en común, por lo que se asegura que cualquier posición tomada por un partido no captará en ningún caso a la vez a estos dos tipos de votantes. Con estas ideas, en el presente trabajo, se desarrolla un estudio de tipo geométrico determinista en el que, de forma exacta, se encuentran posiciones óptimas (posturas o decisiones políticas) a tomar por un partido en el escenario anteriormente descrito, a través de técnicas de localización y de geometría computacional ([16]; [17]).

La sección 2 presenta el modelo matemático a estudio y sus variaciones, así como los algoritmos de búsqueda de posiciones óptimas. En la sección 3 se desarrolla una simulación del algoritmo más general desarrollado en la sección anterior. Por último se describen las conclusiones del artículo así como las posibles extensiones del mismo y líneas futuras de trabajo.

2 ESTUDIO GEOMÉTRICO DETERMINISTA DEL PROBLEMA

2.1 Formalización del modelo

Siguiendo el modelo definido en la sección anterior, se considera que todas las preferencias políticas de los votantes de una población vienen dadas por un conjunto finito de tipos $H = \{p_1, \dots, p_n\}$ [14]. Estos tipos están representados como puntos de la circunferencia unidad dados por sus coordenadas polares $(1, \theta_i)$ con $i = 1 \dots n$. Por simplicidad en la notación, en adelante identificaremos los

puntos por su argumento θ_i :

- $\theta = 0$ representa la posición o política más moderada.
- $\theta = \pi$ representa el punto de fusión de las posturas radicales a la derecha o a la izquierda, más alejadas por tanto de la postura central.

Con la finalidad de adaptar el modelo a la realidad política se asume que los tipos de votantes p_i no están igualmente distribuidos. Es decir, ciertas preferencias políticas cuentan con un mayor número de adeptos. Así, posiciones extremas (con respecto a la mayoría de las acciones políticas) usualmente tienen un menor número de seguidores que las moderadas. Parece por tanto razonable considerar una distribución de pesos para los tipos de votantes. Se define entonces el peso de cada posición p_i como $\text{peso}(p_i) = k_i$, siendo $k_1 + \dots + k_n = n$. El peso de un subconjunto de tipos será la suma de los pesos de los tipos contenidos en él. ([18]).

Se considerará que una postura política θ_i adoptada por un partido captará a los tipos de votantes θ_i que se encuentran a una distancia a dicha postura menor o igual que una determinada cota $\frac{\phi_i}{2}$ con $\phi_i \geq 0$. Dicha cota representa el nivel o radio de tolerancia que permiten los tipos de votantes para elegir a un partido que no ofrece exactamente lo que ellos demandan. La distancia considerada, $d(\theta, \theta_i)$, será la definida sobre la circunferencia como la longitud del arco menor que separa a dichos puntos. De esta forma, para que el tipo i esté a una distancia menor o igual que $\frac{\phi_i}{2}$ de la postura ofrecida por el partido, esta postura tendrá que estar posicionada en el arco de circunferencia cerrado de longitud ϕ_i cuyos extremos en polares son los puntos $\theta_i - \frac{\phi_i}{2}, \theta_i + \frac{\phi_i}{2}$ (arco de tolerancia para el tipo). Ver figura 1.

El partido que deba alterar sus políticas para adaptarse a una situación crítica, estará interesado en encontrar las posiciones óptimas dentro de la circunferencia unidad que maximizan el peso del conjunto de tipos de votantes tal que el partido está contenido en sus arcos de tolerancia.

2.2 Búsqueda de posiciones óptimas

Caso de radios de tolerancia constantes.

Se estudia una primera aproximación, técnicamente más sencilla, en la que se supone que todos los tipos de votantes tienen asociado el mismo radio de tolerancia, por lo que $\phi_i = \phi$ para $i = 1, \dots, n$. No obstante, para evitar que la postura elegida por un partido capte a la vez a tipos de votantes de extrema derecha y extrema izquierda (algo improbable en la realidad), se supondrá que:

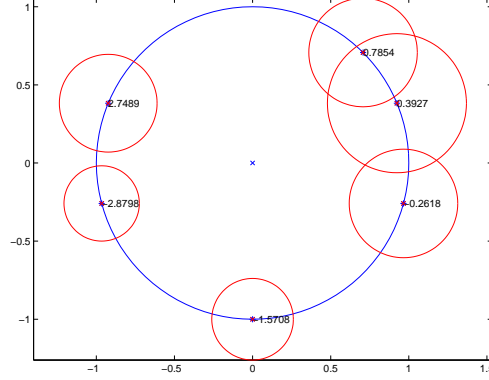


Fig. 1: Posiciones de tipos de votantes (en radianes) con sus niveles de tolerancia

$$\begin{cases} \frac{\phi}{2} < \text{minimo}(d(\theta_i, \pi)) & \text{si } \theta_i \neq \pi \forall i \\ \phi = 0 & \text{si } \theta_i = \pi \text{ para algún } i \end{cases}$$

Se cumplirá en este caso que, dada una posición θ elegida por un partido, captará a los tipos de votantes θ_i contenidos en el arco de circunferencia cerrado de longitud ϕ cuyos extremos en polares son los puntos $\theta - \frac{\phi}{2}, \theta + \frac{\phi}{2}$ (arco de tolerancia para la posición θ , al que llamaremos para abreviar arco de tolerancia). Con esta simplificación, se buscan las posiciones óptimas a elegir por un partido para captar el mayor peso de tipos de votantes. Una dificultad asociada a dicha búsqueda es que el número de posiciones que puede elegir un partido son infinitas puesto que el espacio político es la circunferencia unidad. De esta manera, sería deseable poder reducir el problema a un caso finito discretizándolo. La siguiente proposición demuestra que esta metodología de discretización es adecuada.

Proposición 1. *Siempre existe un arco de tolerancia en el que se maximiza el peso de tipos de votantes incluidos en él que tiene como uno de sus extremos la posición de uno de los tipos de votantes.*

Demostración. Sea I un arco donde se alcanza el máximo, si ninguno de sus extremos es la posición de un tipo de votantes, puede desplazarse dicho arco en un sentido, hasta que uno de los extremos sea una de esas posiciones sin perder peso respecto al arco I . Por ello, en este nuevo arco se alcanza dicho máximo. El desplazamiento del arco en el otro sentido determina otro arco de las mismas características en el que se maximiza el peso. De esta forma siempre existen al

menos dos arcos que verifican la condición pedida, salvo en el caso en el que los dos extremos del arco inicial I ya sean posiciones de votantes. \square

Nota 1. Como consecuencia de la proposición 1, para encontrar el posicionamiento óptimo del partido deben tomarse las posiciones de los tipos de votantes y considerar aquellos arcos de tolerancia que tienen como uno de los extremos dichas posiciones. De esta forma se ha discretizado el problema continuo.

2.3 Algoritmo para tolerancia constante (Algoritmo 1)

Se aplica la proposición 1 para el desarrollo de un algoritmo que encuentre las posiciones óptimas para un partido y de esta forma éste pueda determinar su estrategia.

- Input:
 - Las n posiciones de los tipos de votantes $\theta_1, \dots, \theta_n$ dentro de la circunferencia unidad y sus respectivos pesos k_i , $i = 1, \dots, n$.
 - El nivel de tolerancia: $\frac{\phi}{2}$.
- Output: Las posiciones óptimas para el partido dentro de la circunferencia unidad y la ganancia en esas posiciones.
- Paso 1: Ordenar los tipos de votantes por su ángulo de posicionamiento en la circunferencia: θ_j . Verificar que el radio de tolerancia elegido cumple que es menor que la distancia a π del primer y último votante de la ordenación realizada.
- Paso 2: Para cada θ_j considerar los arcos $\{\theta_j, \theta_j + \phi\}$ y $\{\theta_j - \phi, \theta_j\}$ y determinar el peso del conjunto de votantes incluidos en dichos arcos.
- Paso 3: Calcular el máximo de los pesos obtenidos en el paso 2, almacenando los arcos donde se alcanzan. Por cada uno de estos arcos que tengan la posición de un tipo de votante en el extremo inferior, existirá otro que tenga la posición de un tipo de votante en el extremo superior (ver la demostración de la proposición 1). Se ordenarán los arcos según los extremos que sean un tipo de votante aprovechando la ordenación del paso 1.

Nota 2. En el caso en que el máximo se obtenga en una pareja de arcos de la forma $\{\theta_j, \theta_j + \phi\}$, $\{\theta_j - \phi, \theta_j\}$ la ordenación de los mismos se hará considerando en primer lugar el $\{\theta_j - \phi, \theta_j\}$.

- Paso 4: De los arcos ordenados almacenados en el paso 3 identificar las parejas de arcos consecutivos.
- Paso 5: La posición óptima para el partido será cualquiera de los puntos de los arcos de circunferencia limitados por los puntos medios de los arcos de las parejas obtenidas en el paso 4 (ver figura 2). El peso máximo obtenido en dichas posiciones será el calculado en el paso 3.

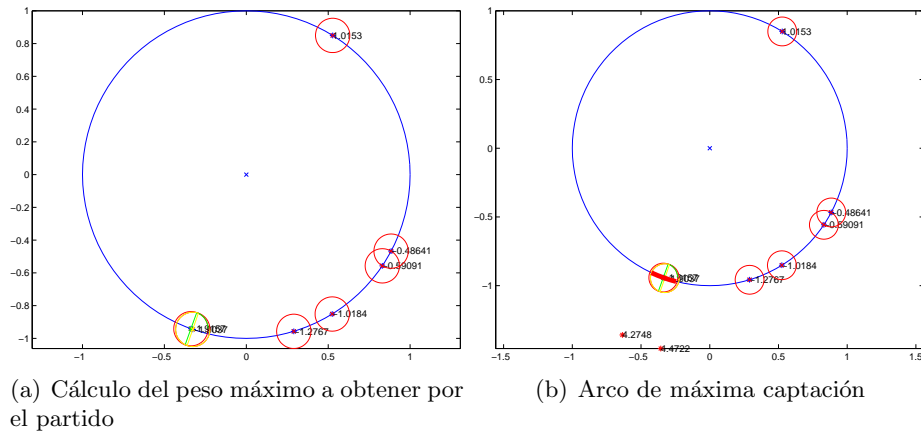


Fig. 2: Cálculo del peso máximo a obtener por el partido y arco de máxima captación

Nota 3. Como puede observarse en la figura 2, la zona de máxima captación no siempre coincide con la zona de máxima intersección de arcos de circunferencia, ya que depende del peso de cada tipo de votante.

2.4 Estudio de la complejidad del algoritmo 1

- Paso 1: Ordenación de los n tipos de votantes: se reduce a la ordenación de n números (los ángulos que los posicionan). Complejidad del orden $n \log n$ ([19]). La comprobación de la condición para el radio de tolerancia se realiza en tiempo constante.
- Paso 2: Por cada uno de los n tipos de votantes debe verificarse si los $n - 1$ restantes pertenecen a los intervalos considerados y calcular la suma de los pesos de los que pertenecen. Deben hacerse así dos comparaciones por cada uno de ellos y una operación aritmética. Complejidad cuadrática: $O(n^2)$

- Paso 3: Ordenación de los pesos encontrados en el paso 2 para obtener el máximo y de los arcos donde se alcanzan. Complejidad $O(n \log(n))$.
- Paso 4: Elección de arcos consecutivos uno con extremo superior un tipo de votante y otro con extremo inferior un tipo de votante. Complejidad como máximo lineal ya que es un número constante de operaciones para cada arco: $O(n)$.
- Paso 5: Cálculo de los puntos medios de los arcos de circunferencia determinados en el paso 4. Es un número finito de operaciones por cada arco por lo que en el peor de los casos la complejidad es lineal ya que en ese caso el número de intervalos sería $2n$: $O(n)$.
- Complejidad final del algoritmo $O(n^2)$.

Nota 4. *Se observa que las posiciones óptimas que puede elegir un partido son, en general, infinitas ya que es un arco o unión de arcos de circunferencia. Por tanto, aunque el conjunto de tipos de votantes es finito las estrategias a considerar pueden resultar infinitas. Esto es beneficioso para los partidos ya que pueden adaptar la decisión a tomar según su ideología, buscando dentro del arco o arcos de optimización la posición más cercana a ella.*

Caso de radios de tolerancia variables.

En este apartado se considerará el caso general en el que los radios de tolerancia son sensibles a las ideologías de los tipos de votantes.

Formalizando las ideas recogidas en la introducción para este caso, se asocia a cada tipo de votante θ_i un radio de tolerancia $\frac{\phi_i}{2}$, $i = 1, \dots, n$. Para reflejar que las posturas extremas son más intransigentes, se supondrá que ϕ_i disminuye según θ_i se acerca a π o $-\pi$. Esta disminución no tiene porqué ser igual en ambos sentidos, es decir la intransigencia en los votantes de derechas e izquierdas no tiene porqué avanzar de la misma forma. Además, con el mismo objetivo que se planteó en el caso de radio de tolerancia constante, se supondrá que:

$$\begin{cases} \frac{\phi_i}{2} < d(\theta_i, \pi) & \text{si } \theta_i \neq \pi \\ \phi_i = 0 & \text{si } \theta_i = \pi \end{cases}$$

Se buscaría entonces, como región óptima para el partido, la zona de intersección de arcos de circunferencia de extremos $\theta_i - \frac{\phi_i}{2}, \theta_i + \frac{\phi_i}{2}$, $i = 1, \dots, n$ que dé máximo peso. La suma de los pesos de los votantes correspondientes a los arcos que intersecan en esa zona, será la máxima ganancia que puede tener el partido.

Algoritmo para tolerancia variable (Algoritmo 2)

Se presenta a continuación el algoritmo de cálculo de la zona de máxima ganancia de tipos de votantes.

Input:

- Las n posiciones de los tipos de votantes $\theta_1, \dots, \theta_n$ dentro de la circunferencia unidad y sus respectivos pesos k_i , $i = 1, \dots, n$.
- Los niveles de tolerancia $\frac{\phi_i}{2}$, $i = 1, \dots, n$.

Output:

- Las posiciones óptimas para el partido dentro de la circunferencia unidad y la ganancia en dichas posiciones.

Paso previo: Verificar que los radios de tolerancia cumplen la condición del modelo.

Paso 1: Considerar la lista L formada por los extremos de los arcos de circunferencia centrados en cada tipo de votante θ_i y radio su nivel de tolerancia: $\{x_i, x'_i\}$. Ordenar dicha lista por el ángulo de posicionamiento de sus puntos. Se asigna a la variable x el primero de los puntos de la lista L : $x = x_1$.

Observación: En caso de que los puntos x y x'_i coincidan por ser el nivel de tolerancia 0 (algo que ocurre en $\theta_i = \pi$), se considerará x_i anterior a x'_i en la lista L .

Paso 2: Se inicializan dos contadores m y c como 0. Recorrer la lista L efectuando en cada elemento las siguientes operaciones:

- Si se trata de un elemento de la forma x_i , se aumenta el contador c en k_i .
- Si se trata de un elemento de la forma x'_i , se disminuye el contador c en k_i .

Cuando $c > m$, se redefine m como c y x como x_i .

Cuando $c = m$ se guarda x_i en una nueva variable *more* para tener en cuenta el caso en que hay más de un arco con máximo peso.

Al finalizar el proceso, el contador m indica el máximo peso que el partido puede conseguir. El arco donde debe situarse para ello será el que tiene como extremos a x y al siguiente punto de la lista L o, en su caso, a los almacenados en *more* y los siguientes puntos de la lista.

Estudio de la complejidad del algoritmo 2:

- **Paso previo:** Comprobación de que los valores de ϕ_i cumplen que :

$$\begin{cases} \frac{\phi_i}{2} < d(\theta_i, \pi) & \text{si } \theta_i \neq \pi \\ \phi_i = 0 & \text{si } \theta_i = \pi \end{cases}$$

Complejidad lineal puesto que es un número constante de operaciones para cada tipo de votantes.

- **Paso 1:** Ordenación de los $2n$ elementos de la lista L : se reduce a la ordenación de $2n$ números (los ángulos que los posicionan). Complejidad del orden $n \log(n)$.
- **Paso 2:** Se requiere una cantidad de operaciones proporcional al número de elementos de la lista L , que en el peor caso es lineal.

Así, la complejidad de todo el algoritmo sería $O(n \log(n))$.

3 EXPERIMENTOS COMPUTACIONALES

En esta sección se presentan los resultados del desarrollo computacional del algoritmo 2 descrito en la sección anterior para diversos casos en los que se varían las posiciones de los votantes. Se ha decidido poner en práctica este segundo algoritmo ya que es más general al incluir el caso de radios de tolerancia constantes como un caso particular. Se han realizado seis estudios que pretenden describir un abanico de posibilidades que representen diversos escenarios en la política de un país.

3.1 Simulación 1

Este primer ejemplo puede tomarse como el modelo de una situación de estabilidad donde las preferencias de mayores pesos de los votantes se sitúan en una zona moderada repartidas en tendencias centristas más a la derecha o a la izquierda y con un par de grupos de ciudadanos cercanos a la extrema izquierda y a la extrema derecha respectivamente (ver tabla 1 y figura 3).

Esta situación suele ocurrir cuando el país se encuentra en un momento de bonanza económica y tranquilidad social. Los ciudadanos entonces tienden a posturas de centro que representan el equilibrio.

Tabla 1: Datos simulación 1. Los datos angulares están dados en radianes

Ángulo	Peso	Tolerancia
0.3927	2	0.4488
0.7854	0.5	0.34907
2.7489	0.5	0.31416
-2.8798	0.5	0.24166
-1.5708	0.5	0.2618
-0.2618	2	0.34907

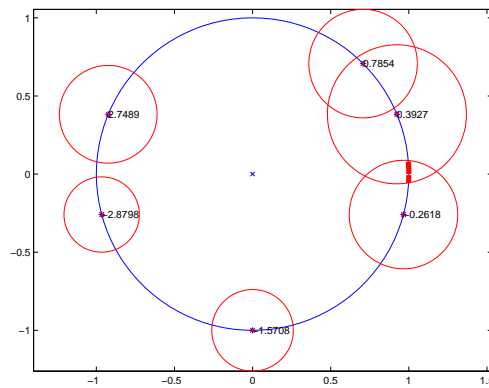


Fig. 3: Arco de máxima captación en la simulación 1

La tabla 1 muestra los datos relativos a este ejemplo. Como el peso mayor se encuentra en los tipos de votantes de centro, las posiciones políticas que garantizan mayor captación de votos son las cercanas a estas preferencias (ver figura 3), pudiendo el partido tender un poco más hacia la derecha o hacia la izquierda, por el margen de amplitud de la región óptima. Este margen permite al partido político ofrecer un programa más acorde con su ideología, dentro de esa posición de centro.

3.2 Simulación 2

El segundo ejemplo trata ahora de reflejar un estado de crispación social, de crisis, en el que los ciudadanos radicalizan sus preferencias. Para ello se han asignado mayores pesos a los tipos de votantes con posturas políticas más extremas (posiciones angulares cercanas a $\pm\pi$). Los datos pueden consultarse en la tabla 2.

En situaciones problemáticas se observa que, por un lado, el gobierno tiene que

Tabla 2: Datos simulación 2. Los datos angulares están dados en radianes

Ángulo	Peso	Tolerancia
0.7854	0.5	0.5236
2.618	1	0.31416
2.8798	1	0.24166
-2.7489	2	0.2618
-0.3927	0.5	0.3927

tomar ciertas decisiones que suponen medidas severas y en cierto modo impuestas sin tener en cuenta las preferencias de la sociedad. Por otro, los ciudadanos tienden a reaccionar a estas decisiones radicalizando su ideología y escorándose en sus preferencias políticas hacia posturas menos flexibles, lo que hará que los partidos tengan que redireccionar sus posiciones para asegurarse una óptima ganancia. En el ejemplo concreto que se ha planteado, resultan dos regiones óptimas situadas en posiciones cercanas a la extrema derecha e izquierda respectivamente (ver figura 4).

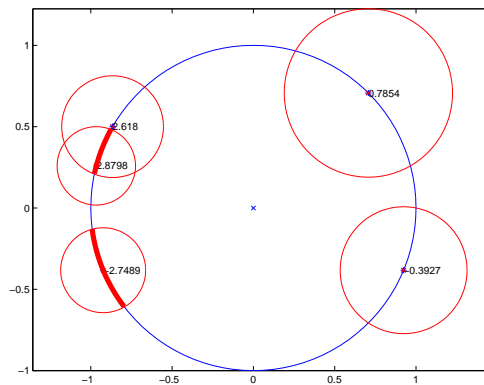


Fig. 4: Arcos de máxima captación en la simulación 2

Esto hace que la política a elegir por el partido deba radicalizarse con la posibilidad de hacerlo en el sentido más cercano a su ideología.

3.3 Simulación 3

El tercer ejemplo vuelve a modelar una situación cercana a la moderación con mayor número de tipos de votantes que en el ejemplo 1 (los datos se reflejan en la tabla 3) y con una mayor posibilidad de posicionamiento óptimo para el partido

(ver figura 5).

Tabla 3: Datos simulación 3. Los datos angulares están dados en radianes

Ángulo	Peso	Tolerancia
0.47124	2.5	0.4488
1.0472	0.5	0.34907
2.3562	0.25	0.2618
-2.805	0.75	0.2244
-0.7854	1	0.34907
-0.62832	1	0.4488
-0.47124	1	0.47124

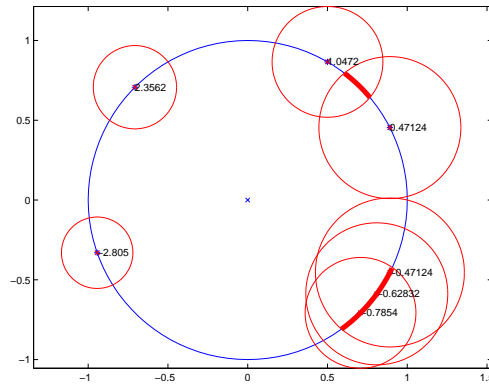


Fig. 5: Arcos de máxima captación en la simulación 3

En este caso se aprecian dos zonas de máxima captación situadas en la ideología de derechas o de izquierdas no radical. El partido debe ahora adaptar sus políticas a las zonas de intersección de los arcos de tolerancia de ciertos tipos de votantes, acercándose a las que resultan más próximas a su ideología.

3.4 Simulación 4

Este ejemplo modela una situación radical del escenario político. Los ciudadanos están repartidos en preferencias políticas radicales (tabla 4). Como puede observarse en los resultados (figura 6), la zona de máxima captación se encuentra de nuevo escorada hacia las posiciones más radicales, en este caso cercana a $-\pi$. Esto explica cómo en situaciones de crispación, inestabilidad o crisis, los programas de los partidos políticos se radicalizan.

Tabla 4: Datos simulación 4. Los datos angulares están dados en radianes

Ángulo	Peso	Tolerancia
-2.9775	1.2302	0.070848
-2.6079	1.688	0.23027
-1.7628	1.1646	0.27931
1.0009	1.1729	0.13976
2.4522	0.2635	0.13068

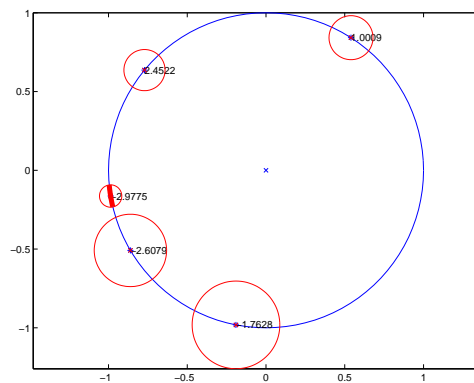


Fig. 6: Arco de máxima captación en la simulación 4

3.5 Simulación 5

En este ejemplo, la tabla 5 de datos muestra una dispersión de los tipos de votantes divididos entre ciudadanos de preferencias moderadas, unos grupos poco numerosos de votantes de la extrema derecha y un núcleo de mucho peso cercano a la extrema izquierda. La posición de máxima captación se encuentra en la intersección de los arcos de tolerancia de tipos de votantes de izquierda (figura 7).

Como puede observarse en esta simulación, al igual que en las anteriores presentadas, los resultados de las zonas de máxima captación dependen en gran medida de los pesos asignados a los tipos de votantes. Dichos pesos son los que, normalmente, indican si nos encontramos en una situación moderada ó radical.

4 CONCLUSIONES

Los datos direccionales aparecen en el estudio de diferentes campos del conocimiento como son la biología o la meteorología entre otros. La principal aportación

Tabla 5: Datos simulación 5. Los datos angulares están dados en radianes

Ángulo	Peso	Tolerancia
-2.4061	1.9804	0.23124
-2.1935	1.0015	0.39148
-0.084235	1.0084	0.42974
0.23297	1.0027	0.52135
1.1507	1.0048	0.39607
1.9625	1.0004	0.0098343
2.5372	0.0018	0.0027888

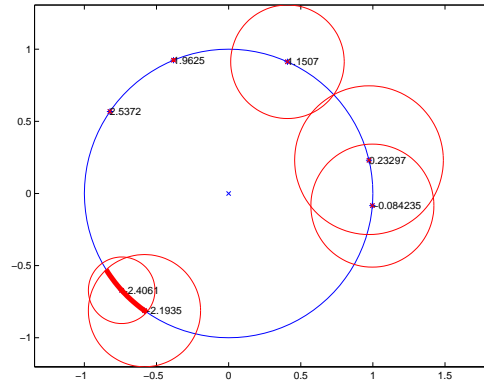


Fig. 7: Arco de máxima captación en la simulación 5

del presente trabajo es la utilización de este tipo de datos en el área de la economía política, concretamente en temas relacionados con la localización política. Este tratamiento tiene una justificación desde el punto de vista de las ideologías y ha permitido desarrollar un modelo que se ajusta a los diversos escenarios políticos que se pueden dar en la sociedad actual. Bajo este modelo, el problema que se ha resuelto es el de encontrar las posiciones (políticas) óptimas, dentro de la circunferencia, que puede elegir un partido para asegurarse el mayor número posible de tipos de votantes. Los resultados teóricos obtenidos se han implementado de forma efectiva en algoritmos de búsqueda mediante los que se han realizado simulaciones que tratan diversas realidades políticas que puedan darse. Finalmente, la interpretación de los resultados derivados de los ejemplos prácticos ha permitido validar la utilidad del trabajo realizado y presentar estrategias a seguir por los partidos que en muchos casos, deben redireccionar sus posturas para adaptarse a situaciones cambiantes generadas por coyunturas económicas o sociales que afectan a las preferencias ideológicas de los ciudadanos. El trabajo abre una

línea de actuación para futuras investigaciones en el área de la economía política que puede ser aplicada a otras ciencias.

REFERENCIAS

- [1] Nicholas I. Fisher, Toby Lewis, and Brian JJ Embleton. *Statistical analysis of spherical data*. Cambridge University Press, 1987.
- [2] Kanti V. Mardia. Statistics of directional data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 37:349–393, 1975.
- [3] Nicholas I. Fisher. *Statistical analysis of circular data*. Cambridge University Press, 1995.
- [4] Kanti V. Mardia and Peter E. Jupp. *Directional statistics*, volume 494. Wiley, 2009.
- [5] S. Rao Jammalamadaka and Ambar Sengupta. *Topics in circular statistics*, volume 5. World Scientific Publishing Company, 2001.
- [6] Barry C. Arnold and Ashis SenGupta. Recent advances in the analyses of directional data in ecological and environmental sciences. *Environmental and Ecological Statistics*, 13(3):253–256, 2006.
- [7] Melvin J. Hinich and Walker Pollard. A new approach to the spatial theory of electoral competition. *American Journal of Political Science*, 25(2):323–341, 1981.
- [8] John Nash. Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics*, 54(2):286–295, 1951.
- [9] Charles R. Plott. A notion of equilibrium and its possibility under majority rule. *The American Economic Review*, 57(4):787–806, 1967.
- [10] Gerald H. Kramer. On a class of equilibrium conditions for majority rule. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 41(2):285–297, 1973.
- [11] Richard D. McKelvey. Intransitivities in multidimensional voting models and some implications for agenda control. *Journal of Economic Theory*, 12(3):472–482, 2012.
- [12] Manuel Abellanas, M. Dolores López, and Javier Rodrigo. Searching for equilibrium positions in a game of political competition with restrictions. *European Journal of Operational Research*, 201(3):892–896, 2010.

- [13] Manuel Abellanas, M. Dolores López, Javier Rodrigo, and Isabel Lillo. Weak equilibrium in a spatial model. *International Journal of Game Theory*, 40(3):449–459, 2011.
- [14] John E. Roemer. *Political competition: Theory and applications*. Harvard University Press, 2006.
- [15] M. Dolores López and Javier Rodrigo. Discrete models of political competition: strategies of victory and study of equilibrium. *Game theory: strategies, equilibria and theorems*, pages 161–182, 2009.
- [16] Manuel Abellanas, Isabel Lillo, M. Dolores López, and Javier Rodrigo. Electoral strategies in a dynamical democratic system. geometric models. *European Journal of Operational Research*, 175(2):870–878, 2006.
- [17] Bhaswar B. Bhattacharya and Subhas C. Nandy. New variations of the maximum coverage facility location problem. *European Journal of Operational Research*, 2012.
- [18] Javier Rodrigo, M. López, and Isabel Lillo. Two-party political competition: A geometric study of the nash equilibrium in a weighted case. *Applied Mathematical Sciences*, 1(55):2715–2725, 2007.
- [19] Mark De Berg, Marc Van Kreveld, Mark Overmars, and Otfried Schwarzkopf. *Computational geometry*. Springer, 1997.